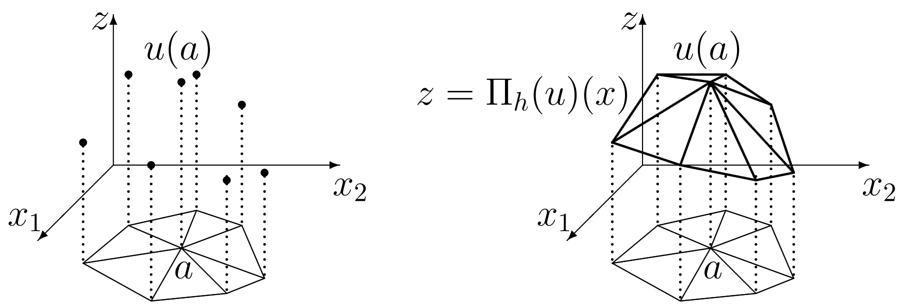
Programy a Algoritmy Numerické Matematiky 14
Dolní Maxov 2008

APROXIMACE GRADIENTU VE VRCHOLECH OSTŘE REGULÁRNÍCH TRIANGULACÍ

Josef Dalík
Fakulta stavební VUT v Brně



Obrázek 1

Definice 1. Nechť $\Omega \subset \Re^2$ je ohraničený polygon a $\mathcal{T}$ triangulace Ω a vlastností $\cup_{T\in\mathcal{T}} T = \overline{\Omega}$. Řekneme, že

$$\mathcal{N}(a) = \{b \,|\, \overline{ab} \text{ je strana trojúhelníka z } \mathcal{T}\}$$

je *množina sousedů* vrcholu a triangulace $\mathcal{T}$ a položíme

$$h_{\max}(a) = \max_{b\in\mathcal{N}(a)} |ab|, \quad h_{\min}(a) = \min_{b\in\mathcal{N}(a)} |ab|.$$

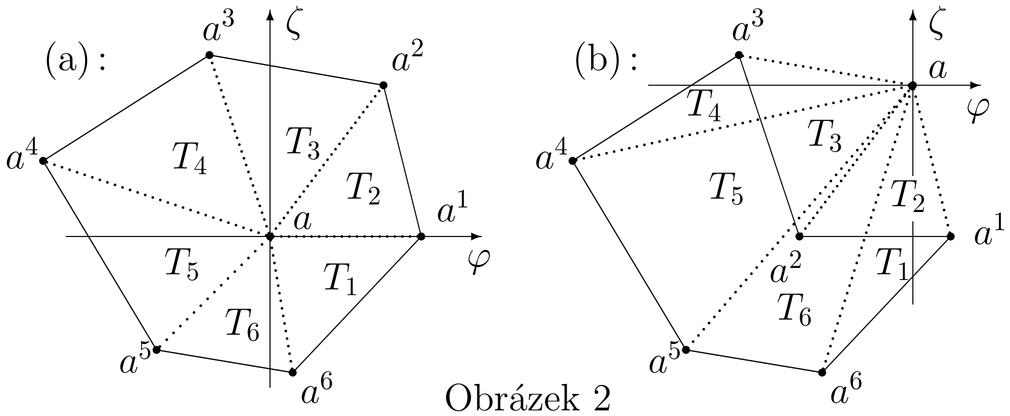
Symbolem $A(T)$ označíme plochu trojúhelníka T a h_T maximum délek jeho stran.

Definice 2. Triangulace $\mathcal{T}$ se nazývá *ostře regulární*, když

$$\exists \nu > 0 \ : \ A(T) > \nu h_T^2 \ \ \forall T \in \mathcal{T}$$

a trojúhelníky z $\mathcal{T}$ nemají tupé vnitřní úhly. Symbolem $\mathbf{T}$ označíme třídu ostře regulárních triangulací pevné oblasti Ω s pevným parametrem ν.

Definice 3. Nechť a je vnitřní vrchol triangulace $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$. Řekneme, že uspořádaná $(n+1)$–tice $(a^1, \ldots, a^n, a)$ je *prstenec* (okolo a v $\mathcal{T}$), když $\{a^1, \ldots, a^n\} = \mathcal{N}(a)$ a $T_1 = \overline{aa^na^1}, T_2 = \overline{aa^1a^2}, \ldots, T_n = \overline{aa^{n-1}a^n}$ jsou stejně orientované trojúhelníky z $\mathcal{T}$. Položíme $\Theta(a) = \bigcup_{i=1}^n T_i$.



Obrázek 2

Definice 4. Symbolem $\mathcal{P}^2$ označíme funkční prostor (reálných) polynomů

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 (x_1)^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 (x_2)^2. \quad (1)$$

Definice 5. Nechť $r = (a^1, \ldots, a^n, a)$ je prstenec v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ a z jednotkový vektor.

(a) Pro libovolnou funkci $u \in C(\overline{\Omega})$ označíme $\Pi_i(u)$ lineární interpolant funkce u splňující

$$\Pi_i(u)(x) = u(x) \quad \text{pro} \quad x = a, a^{i-1}, a^i.$$

(b) Označíme $\mathcal{F}_z(r)$ množinu všech vektorů f splňujících

$$f_1 \frac{\partial \Pi_1(P)}{\partial z} + \ldots + f_n \frac{\partial \Pi_n(P)}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}(a) \quad \forall P \in \mathcal{P}^2. \quad (2)$$

Věta 1. Pro každou konstantu $C > 0$ a funkci $u \in C^3(\overline{\Omega})$ existuje konstanta $C_1 > 0$ tak, že

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z}(a) - \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial \Pi_i(u)}{\partial z} \right| < C_1 h_{\max}(a)^2$$

pro všechny prstence $r = (a^1, \ldots, a^n, a)$ v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$, jednotkové vektory z a pro všechna $f \in \mathcal{F}_z(r)$, $\|f\|_\infty < C$.

Věta 2. Existuje konstanta $C_2 > 0$ tak, že pro každý prstenec $r = (a^1, \ldots, a^n, a)$ v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ a pro každý jednotkový vektor z existuje $f \in \mathcal{F}_z(r)$ s vlastností $\|f\|_\infty < C_2$.

Definice 6. Pro libovolný prstenec $(a^1, \ldots, a^n, a)$ v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$, jednotkový vektor z a pro $i = 1, \ldots, n$ položíme

$$z^\perp = [-z_2, z_1]^\top \qquad \varphi_i = (\overrightarrow{aa^i}, z), \qquad \zeta_i = (\overrightarrow{aa^i}, z^\perp),$$
$$t_i = \varphi_{i-1}\zeta_i - \varphi_i\zeta_{i-1}.$$

Pro bazi

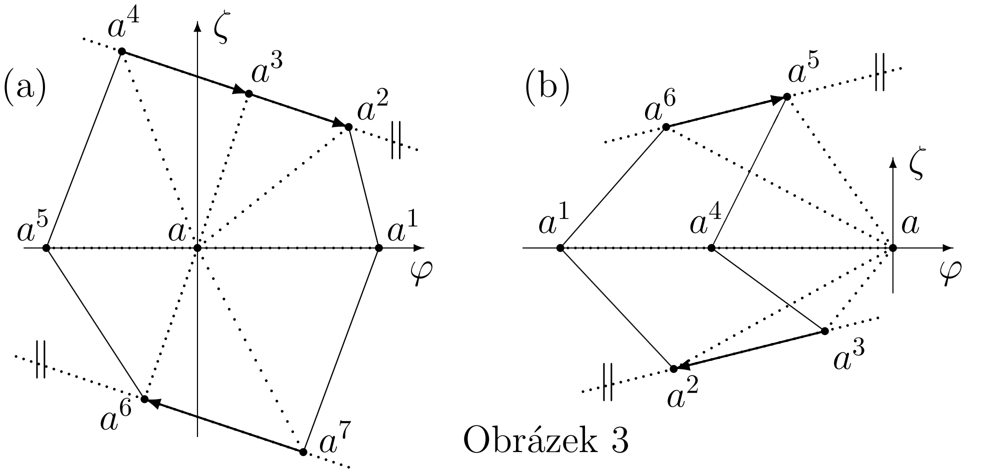
$$\begin{array}{lll} F_1 = (\overrightarrow{ax}, z) & F_2 = (\overrightarrow{ax}, z^\perp) & F_3 = (\overrightarrow{ax}, z)^2 \\ F_4 = (\overrightarrow{ax}, z)(\overrightarrow{ax}, z^\perp) & F_5 = (\overrightarrow{ax}, z^\perp)^2 & F_6 = 1 \end{array}$$

nabude systém rovnic (2) tvaru

$$Mf = d,$$

kde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\varphi_n^2\zeta_1 - \varphi_1^2\zeta_n}{t_1} & \frac{\varphi_1^2\zeta_2 - \varphi_2^2\zeta_1}{t_2} & \cdots & \frac{\varphi_{n-1}^2\zeta_n - \varphi_n^2\zeta_{n-1}}{t_n} \\ \frac{\zeta_n\zeta_1(\varphi_n - \varphi_1)}{t_1} & \frac{\zeta_1\zeta_2(\varphi_1 - \varphi_2)}{t_2} & \cdots & \frac{\zeta_{n-1}\zeta_n(\varphi_{n-1} - \varphi_n)}{t_n} \\ \frac{\zeta_n\zeta_1(\zeta_n - \zeta_1)}{t_1} & \frac{\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 - \zeta_2)}{t_2} & \cdots & \frac{\zeta_{n-1}\zeta_n(\zeta_{n-1} - \zeta_n)}{t_n} \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 3

Věta 3. Uvažme prstenec $r = (a^1, \dots, a^n, a)$ v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ s vlastností $n \geq 5$ a jednotkový vektor z. Pak vektor f, vypočtený PROCEDUROU

Krok 1. $h^2 = \dfrac{1}{\|m^2\|} m^2$

Krok 2. $h^3 = \dfrac{1}{\|h^{3*}\|} h^{3*}$ pro $h^{3*} = m^3 - (m^3, h^2)h^2$

Krok 3. $h^{4*} = m^4 - (m^4, h^3)h^3 - (m^4, h^2)h^2$

Krok 4. $\|h^{4*}\| = 0 \implies h^{1*} = m^1 - (m^1, h^2)h^2 - (m^1, h^3)h^3$ jinak

$h^4 = \dfrac{1}{\|h^{4*}\|} h^{4*}$ a $h^{1*} = m^1 - (m^1, h^2)h^2 - (m^1, h^3)h^3 - (m^1, h^4)h^4$

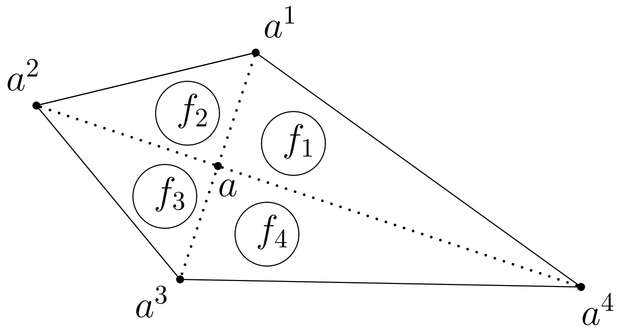
Krok 5. $f = \dfrac{1}{(m^1, h^{1*})} h^{1*}$

leží v $\mathcal{F}_z(r)$ a $\|f\| \leq \|g\|$ pro všechna $g \in \mathcal{F}_z(r)$.

Věta 4. Buďte z jednotkový vektor a $r = (a^1, \ldots, a^4, a)$ prstenec v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ s vlastností $\zeta_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, 4$. Pak pro vektor f :

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\|aa^3\|}{\|a^1a^3\|} + \frac{\|aa^2\|}{\|a^2a^4\|}\right) \\
f_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\|aa^3\|}{\|a^1a^3\|} + \frac{\|aa^4\|}{\|a^2a^4\|}\right) \\
f_3 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\|aa^1\|}{\|a^1a^3\|} + \frac{\|aa^4\|}{\|a^2a^4\|}\right) \\
f_4 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\|aa^1\|}{\|a^1a^3\|} + \frac{\|aa^2\|}{\|a^2a^4\|}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

platí $f \in \mathcal{F}_z(r)$ a $\|f\| \leq \|g\|$ pro všechna $g \in \mathcal{F}_z(r)$.



Obrázek 4

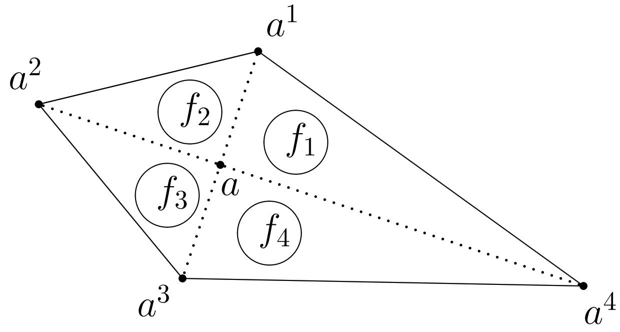
Věta 5. Buďte z jednotkový vektor a $r = (a^1, \ldots, a^4, a)$ prstenec v triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ s vlastností $\zeta_i = 0$ právě když $i = 1$ nebo $i = 3$. Pak vektor g leží v $\mathcal{F}_z(r)$ právě když

$$g_1 + g_2 = \frac{\varphi_3}{(\varphi_3 - \varphi_1)}, \qquad g_3 + g_4 = \frac{\varphi_1}{(\varphi_1 - \varphi_3)}.$$

a vektor f :

$$f_1 = \frac{\varphi_3}{2(\varphi_3 - \varphi_1)} = f_2, \qquad f_3 = \frac{\varphi_1}{2(\varphi_1 - \varphi_3)} = f_4$$

má vlastnosti $f \in \mathcal{F}_z(r)$ a $\|f\| \leq \|g\|$ pro všechna $g \in \mathcal{F}_z(r)$.



Obrázek 4

Uvažme funkci

$$u(x) = \sin(2x_1 - 3x_2 + 0.5) - 2e^{1+x_1-0.5x_2},$$

prstenec z Obr. 4 a položme

$$\partial u_h^a/\partial x_1(a) \equiv \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Pi_{h,1}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,2}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,3}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,4}(u)}{\partial x_1}\right),$$

$$\partial u_h^w/\partial x_1(a) \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \Pi_{h,1}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,4}(u)}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \Pi_{h,2}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,3}(u)}{\partial x_1}\right),$$

$$\partial u_h/\partial x_1(a) \equiv \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \Pi_{h,1}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,4}(u)}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \Pi_{h,2}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_{h,3}(u)}{\partial x_1}\right).$$

h	$\partial(u - u_h^a)/\partial x_1(a)$	$\partial(u - u_h^w)/\partial x_1(a)$	$\partial(u - u_h)/\partial x_1(a)$
2^{-1}	0.7346385940	1.2053354926	0.2639416955
2^{-2}	0.2913089720	0.5136507507	0.0689671933
2^{-3}	0.1247757380	0.2320220515	0.0175294244
2^{-4}	0.0569838937	0.1095556508	0.0044121367
2^{-5}	0.0271216729	0.0531369974	0.0011063485
2^{-6}	0.0132161090	0.0261552427	0.0002769753

Tabulka 1

Definice 7. Pro libovolnou triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$ značí $\mathcal{L}$ prostor funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$ a lineárních na trojúhelnících z $\mathcal{T}$ a $\Pi(u)$ značí $\mathcal{L}$–interpolant funkce $u \in C(\overline{\Omega})$ ve vrcholech $\mathcal{T}$.

Definice 8. Uvažme triangulaci $\mathcal{T} \in \mathbf{T}$, v níž jsou všechny hraniční vrcholy polo–vnitřní a funkci $u \in \mathcal{L}$. Operátory $G_{x_1}[u]$, $G_{x_2}[u] : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ definujeme předpisem: Ke každému vrcholu a triangulace $\mathcal{T}$ a prstenci $(a^1, \ldots, a^n, a)$ přiřadíme

$$\begin{aligned} G_{x_1}[u](a) &= f_1 \frac{\partial \Pi_1(u)}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial \Pi_n(u)}{\partial x_1}, \\ G_{x_2}[u](a) &= g_1 \frac{\partial \Pi_1(u)}{\partial x_2} + \ldots + g_n \frac{\partial \Pi_n(u)}{\partial x_2} \end{aligned}$$

a položíme $G = (G_{x_1}, G_{x_2})$.

Věta 6. Operátor G je *operátor rekonstrukce gradientu*, t.j. G má tyto vlastnosti (R1), (R2), (R3). (Ainsworth, Craigh)

(R1) (Konzistence)

$$G[\Pi(P)] = \nabla P \quad \forall P \in \mathcal{P}^2.$$

(R2) (Lokalizace) Pro každý trojúhelník $T \in \mathcal{T}$ a pro každou funkci $u \in \mathcal{L}$ závisí hodnoty $G[u]$ na T na hodnotách funkce u na sjednocení

$$\Omega(T) = \bigcup_{a \text{ vrchol } T} \Theta(a).$$

(R3) (Linearita a ohraničenost) Operátor G je lineární a existuje konstanta $C > 0$ tak, že

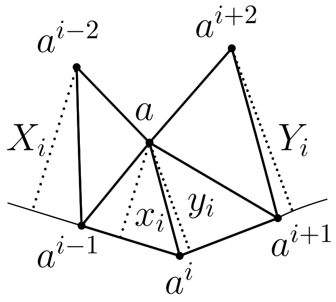
$$\|G[u]\|_{0,\infty,T} \leq C|u|_{1,\infty,\Omega_h(T)} \quad \forall u \in \mathcal{L}.$$

Poznámka. "*Aproximaci gradientu hladké funkce u druhého řádu ve vrcholu a je lineární kombinaci gradientů* $\nabla\Pi_i(u)$ *na trojúhelnících s vrcholem a.*" Nutný předpoklad:

$$\mathcal{F}_z(r) \cap \mathcal{F}_{z^\perp}(r) \neq \emptyset \quad \text{pro} \quad z = [1,0]^\top. \tag{4}$$

V případě $n = 5$ a za předpokladu $\zeta_i \neq 0$, $\varphi_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, 5$ je podmínka (4) ekvivalentí s podmínkou

$$\frac{X_i}{x_i} = \frac{Y_i}{y_i} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, 5.$$



Obrázek 5